

Určovanie optickej konštanty ortotropného opticky citlivého materiálu

Autor: Oskar Ostertag¹

¹Technická univerzita v Košiciach, Strojnícka fakulta, Ústav špeciálnych technických vied, Katedra aplikovanej mechaniky a mechatroniky. Letná 9, 042 00 Košice

<oskar.ostertag@tuke.sk>

Abstrakt

This article deals of the analytic determination of the optical constants of orthotropic optically sensitive material. The knowledge about optical constants creates the basic condition for automatization of process in determination load stresss for 2-D models, which are made from orthotropic material.

Keywords: anisotropic, isotropic, orthotropic, photoelastic measuring

Abstrakt

V článku je vykonaná analýza určovania optických konštant ortotropného, opticky citlivého materiálu. Automatizácia procesu experimentu pri určovaní napätí a deformácií na súčiastkach a 2-D modeloch, vyrobených z ortotropného materiálu, si vyžaduje určiť optické konštanty tohto materiálu.

Kľúčové slová anizotropný, izotropný, ortotropný, fotoelastické meranie

1 Úvod

Renesanciu svojho použitia prežíva a rozsiahle možnosti do budúcnosti naznačuje fotoelastická metóda. Je to bezkontaktná metóda, poskytujúca informáciu z celého skúmaného poľa v zábere meracieho prístroja. Je charakterizovaná tým, že neinterferuje s meraným objektom, je relatívne nenákladná na realizáciu a prevádzku, je schopná merať s minimálnou dĺžkou bázy, t. j. dĺžkou vlny a jej nespornou výhodou je i praktická nezávislosť na relatívnych pohyboch medzi

modelom a analyzátorovou optikou. Je to relevantná metóda aj napriek tomu, že v mnohých prípadoch pracujeme s modelmi [21].

Poznanie optických konštánt ortotropného, opticky citlivého materiálu modelov vytvára základný predpoklad pre automatizáciu procesu merania, a tým vylúčenie vplyvu subjektívneho faktora pri vyhodnocovaní experimentu. Preto sme si dali za cieľ analyticky určiť optické konštanty, ktoré sa stali odrazovým mostíkom pri tvorbe softvérového produktu, schopného vykonať analýzu výsledkov merania na geometricko- a aj záťažovo-symetrických modeloch, vyrobených z ortotropných materiálov.

2 Problém šírenia sa elektromagnetických vln v elektricky anizotropných prostrediach – dielektrikách

Pre vysvetlenie princípu fotoelasticimetrie najviac vyhovuje teória, podľa ktorej je svetlo elektromagnetickým vlnením. Vzájomné pôsobenie elektromagnetického poľa s prostredím – dielektrikom je opísané rovnicami elektromagnetickej teórie podľa Maxwella [4]:

$$\operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

kde E je intenzita elektrického poľa, H je intenzita magnetického poľa, D je elektrická indukcia, B je magnetická indukcia a c je rýchlosť šírenia sa elektromagnetických vln.

Pri kolmom dopade rovinných monochromatických vln na rovinné, elektricky anizotropné prostredie – dielektrikum nás rovnice (1) privádzajú k systému rovníc:

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} D_j = 0 \quad j = 1, 2 \quad (2)$$

kde E_j , D_j predstavujú zložky vektorov intenzity elektrického poľa a elektrickej indukcie v pravouhlom súradnicovom systéme x_1 , x_2 a $x_3 = z$ (súradnica v smere šírenia sa vln) a ω je uhlová frekvencia.

V elektricky anizotropných prostrediach sú vektory E a D viazané závislosťou:

$$D_i = \sum_{j=1}^2 \chi_{ij} E_j \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

kde χ_{ij} sú zložky tenzora dielektrickej permitivity.

Zložky tenzora χ_{ij} môžeme vyjadriť prostredníctvom hlavných hodnôt χ_p , χ_q :

$$\begin{aligned} \chi_{11} &= \frac{\chi_p + \chi_q}{2} + \frac{\chi_p - \chi_q}{2} \cos 2\varphi \\ \chi_{22} &= \frac{\chi_p + \chi_q}{2} - \frac{\chi_p - \chi_q}{2} \cos 2\varphi \\ \chi_{12} &= \frac{\chi_p - \chi_q}{2} \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

kde φ je uhol medzi smerom χ_p a osou x_1 .

Zložky elektrického vektora E_j môžeme taktiež vyjadriť prostredníctvom hlavných hodnôt:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_p \cos \varphi - E_q \sin \varphi \\ E_2 &= E_p \sin \varphi - E_q \cos \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Rovnice (2) v hlavných osiach, s uvažovaním závislosti (3), nadobudnú tvar:

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \chi_j E_j = 0 \quad j = p, q \quad (6)$$

ktorých riešenie je možné určiť v tvare:

$$E_j(z) = E_{0j} e^{\pm ikz} \quad (7)$$

kde E_{0j} je integračná konštanta a $k = \omega (\chi_j)^{1/2} / c$. Z rovnice (7) vyplýva, že ak na povrch rovnorodého, elektricky anizotropného prostredia dopadá lineárne polarizovaná vlna, potom sa táto v strede prostredia rozdeľuje na dva vzájomne kolmé lineárne polarizované kmity s konštantnými amplitúdami E_{0j} . Rýchlosti týchto kmitov sú rôzne, čo vedie k vzniku rôznych fáz týchto kmitov:

$$\Delta = \omega h (\sqrt{\chi_p} - \sqrt{\chi_q}) / c \quad (8)$$

kde h je hrúbka prostredia.

Avšak $\omega/c = 2\pi/\lambda$, teda rovnica (8) nadobudne tvar:

$$\Delta = 2\pi h (\sqrt{\chi_p} - \sqrt{\chi_q}) / \lambda \quad (9)$$

Zmena dielektrickej permitivity v dôsledku deformácie je:

$$\sqrt{\chi_p} - \sqrt{\chi_q} = (\chi_p - \chi_q) / 2\sqrt{\chi_0} \quad (10)$$

Po dosadení (10) do (9) a s použitím (4) dostaneme:

$$\begin{aligned} \chi_{11} - \chi_{22} &= \lambda \sqrt{\chi_0} \Delta \cos 2\varphi / \pi h \\ 2\chi_{12} &= \lambda \sqrt{\chi_0} \Delta \sin 2\varphi / \pi h \end{aligned} \quad (11)$$

alebo

$$\Delta = \pi h ((\chi_{11} - \chi_{22})^2 + (2\chi_{12})^2)^{1/2} / \lambda \sqrt{\chi_0} \quad (12)$$

Rovnice (11) a (12) stanovujú závislosti medzi zložkami tenzora dielektrickej permitivity χ_{ij} a elektromagnetickými veličinami – rôznosť fáz elektrických kmitov. Uvažujme ešte jeden prístup k skúmaniu procesu šírenia sa elektromagnetických vln v elektricky anizotropnom dielektriku – v elektricky anizotropno-ortotropnej vrstve.

Je známe, že geometrickou interpretáciou tenzora vlastností dielektrickej permitivity anizotropného prostredia je elipsoid [4]:

$$\chi_{ij} x_i x_j = 1, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (13)$$

Na elipsoide zavedieme taký súradnicový systém $(0, x_1, x_2, x_3)$, že osi x_1, x_2 ležia v rovine ortotropnej vrstvy a zhodujú sa s osami pružnej symetrie a os x_3 je kolmá na rovinu dosky.

Nech monochromatická elektromagnetická vlna dopadá na dosku pozdĺž osi x_3 so smerovými kosínusmi $\cos \alpha_i$ [10]. Rovnica roviny, kolmej k osi x_3 a pretínajúcej elipsoid v počiatku súradníc, má tvar:

$$x_i \cos \alpha_i = 0 \quad (14)$$

Riešením rovnice (14) v závislosti od x_3 a jej dosadením do (13) dostaneme rovnicu elipsy:

$$\begin{aligned} x_1^2 \left(\chi_{11} - 2\chi_{31} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3} + \chi_{33} \frac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_3} \right) + x_2^2 \left(\chi_{22} - 2\chi_{32} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_3} + \chi_{33} \frac{\cos^2 \alpha_2}{\cos^2 \alpha_3} \right) + \\ + 2x_1 x_2 \left(\chi_{12} - \chi_{13} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_3} - \chi_{23} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_3} - \chi_{33} \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\cos^2 \alpha_3} \right) = 1 \end{aligned} \quad (15)$$

Elipsa (15) leží v rovine $\chi'_1 \sim \chi'_2$ a môže byť zapísaná rovnicou v súradniciach (χ'_1, χ'_2) . Rovnica (15) je všeobecná rovnica pre elektrické (optické) vlastnosti dvojdimenzionálneho prostredia pozdĺž nejakého smeru pozorovania. Pri vhodnej voľbe súradníc, s ohľadom na prostredie, je možné rovnicu (15) zjednodušiť.

Pri odvodení rovníc (11) až (15), spájajúcich dielektrické vlastnosti a elektromagnetické veličiny, sa uvažovali len elektrické (optické) vlastnosti materiálov. Tieto rovnice sú opodstatnené pre materiály – dielektriká s rôznymi mechanickými vlastnosťami. Mechanické vlastnosti materiálov sa uvažujú pri stanovení závislostí, spájajúcich zmenu dielektrickej permitivity s napäťovo-deformačným stavom, spôsobujúcim tieto zmeny.

3 Základné závislosti medzi elektromagnetickými veličinami a napäťovo-deformačným stavom (zákony polarizačnej metódy konštrukčno-anizotropných materiálov)

Základná otázka, ktorú je nutné riešiť pri rozpracovaní polarizačnej metódy sledovania napätosti v kompozitných materiáloch – dielektrikách, spočíva v stanovení závislosti medzi experimentálne nameranými elektromagnetickými veličinami – rozdielmi priebehu elektrických vlnení (optickými rozdielmi priebehu v optickom pásme elektromagnetických vln) a veličinami, charakterizujúcimi napäťovo-deformačný stav. Vzhľadom k malej zmene dielektrickej permitivity, ako dôsledku deformácie materiálu, sa v polarizačných metódach merajú zmeny elektromagnetických veličín – rozdielu dráh elektrických vln (alebo optického rozdielu dráh).

Elektrické (optické) vlastnosti anizotropných materiálov – dielektrik sa charakterizujú tenzorom dielektrickej permitivity. Preto sa pri formulovaní základných závislostí v polarizačných metódach často postupuje nasledovne: stanoví sa závislosť medzi tenzormi dielektrickej permitivity χ_{ij} a tenzormi napätosti σ_{ij} alebo pomernej deformácie ϵ_{ij} . Predpokladáme, že pre teleso v deformovanom stave je dielektrická permitivita anizotropného dielektrika konštantná veličina, nezávislá od súradníc. Sú možné rôzne postupy stanovenia závislostí medzi tenzormi χ_{ij} , σ_{ij} alebo ϵ_{ij} .

Jeden z postupov je založený na spoločnom sledovaní mechanických a elektromagnetických polí s použitím všeobecných termodynamických závislostí [7], kde:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{h} \cos 2\varphi &= \frac{\epsilon_1}{g_{11}} - \frac{\epsilon_2}{g_{22}} \\ \frac{\Delta}{h} \sin 2\varphi &= \frac{\epsilon_6}{g_{66}} \end{aligned} \quad (16)$$

alebo

$$\frac{\Delta}{h} = \left(\left(\frac{\epsilon_1}{g_{11}} - \frac{\epsilon_2}{g_{22}} \right)^2 + \left(\frac{\epsilon_6}{g_{66}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Konštanty g_{11} , g_{22} , g_{66} nazývame elektromagnetickými (optickými) konštantami ortotropných materiálov po deformácii.

Obdobne pre napätia dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{h} \cos 2\varphi &= \frac{\sigma_1}{C_{11}} - \frac{\sigma_2}{C_{22}} \\ \frac{\Delta}{h} \sin 2\varphi &= \frac{2\sigma_{12}}{C_{12}} \end{aligned} \quad (18)$$

alebo

$$\frac{\Delta}{h} = \left(\left(\frac{\sigma_{11}}{C_{11}} - \frac{\sigma_{22}}{C_{22}} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_{12}}{C_{12}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Koeficienty C_{11} , C_{22} , C_{12} sú elektromagnetické konštanty (optické konštanty) ortotropného materiálu viazané na napätia.

Potom je možné vyjadriť závislosť medzi elektromagnetickými veličinami a napätiami k ľubovoľným osiam x , y , pootočených od nositeliek hlavných osí o uhol ψ v tvare:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta}{h} \right)^2 &= \left(\left(\frac{\sigma_x}{C_{11}} - \frac{\sigma_y}{C_{22}} \right) + \left(\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}} \right) (\sigma_y - \sigma_x) \sin^2 \psi + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{xy} \sin 2\psi^2 + \frac{1}{C_{12}^2} ((\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\psi + 2\sigma_{xy} \cos 2\psi)^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Závislosti (16), (18) a (20) dovoľujú pre namerané elektromagnetické veličiny, rozdielom priebehu elektrických vlnení a hlavným smerom elektrickej anizotropie, určiť lineárne (alebo nelineárne) kombinácie medzi zložkami tenzorov napätosti alebo deformácií. Tieto závislosti obsahujú tri elektromagnetické konštanty materiálov g_{11} , g_{22} , g_{12} (pre deformácie) a C_{11} , C_{22} , C_{12} (pre napätia), ktoré možno určiť zo špeciálne zostavených okrajových podmienok.

4 Určenie elektromagnetických konštánt kompozitných materiálov – dielektrík

Pri určovaní elektromagnetických konštánt kompozitných materiálov – dielektrík po deformácii je potrebné vychádzať zo závislosti medzi rozdielmi priebehov elektrických vlnení a pomernými deformáciami ϵ_{ij} v ľubovoľnom systéme súradníc x, y . Pre rovinné ortotropné teleso v súradniciach x, y , pootočených od hlavných osí o uhol θ , dostaneme:

$$\left(\frac{\Delta}{h}\right)^2 = \left(\cos^2 \theta \left(\frac{\epsilon_x}{g_{11}} - \frac{\epsilon_y}{g_{22}}\right) + \sin^2 \theta \left(\frac{\epsilon_y}{g_{11}} - \frac{\epsilon_x}{g_{22}}\right) + \sin^2 2\theta \left(\frac{1}{g_{11}} + \frac{1}{g_{22}}\right) \gamma_{xy}^2 + \left(\sin 2\theta \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{g_{12}} - \cos 2\theta \frac{\gamma_{xy}}{g_{12}}\right)^2\right) \quad (21)$$

Ak dosadíme vstupné parametre skúmaného povrchu, získané pozdĺž hlavného smeru $\theta=0^\circ$, $\epsilon_x^0 \neq 0$, $\epsilon_y^0 \neq 0$, a $\gamma_{xy}^0 = 0$ do rovnice (21), dostaneme po úprave:

$$\frac{\Delta^0}{h} = \frac{\epsilon_x^0}{g_{11}} - \frac{\epsilon_y^0}{g_{22}} \quad (22)$$

Ak dosadíme vstupné parametre skúmaného povrchu, získané pozdĺž hlavného smeru $\theta=90^\circ$, $\epsilon_x^{90} \neq 0$, $\epsilon_y^{90} \neq 0$, a $\gamma_{xy}^{90} = 0$ do rovnice (21), dostaneme po úprave

$$\frac{\Delta^{90}}{h} = \frac{\epsilon_y^{90}}{g_{22}} - \frac{\epsilon_x^{90}}{g_{11}} \quad (23)$$

Riešením sústavy rovníc (22) a (23) dostaneme:

$$\frac{1}{g_{11}} = \frac{\Delta^0 \epsilon_y^{90} + \Delta^{90} \epsilon_y^0}{h(\epsilon_x^0 \epsilon_y^{90} - \epsilon_y^0 \epsilon_x^{90})} \quad (24)$$

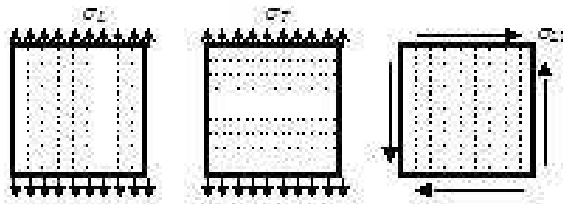
$$\frac{1}{g_{22}} = \frac{\Delta^0 \epsilon_x^{90} + \Delta^{90} \epsilon_x^0}{h(\epsilon_x^0 \epsilon_y^{90} - \epsilon_y^0 \epsilon_x^{90})}$$

Pre určenie elektromagnetickej konštanty g_{12} je nutné vykonať experiment deformáciou vzorky tak, aby sme získali potrebné údaje v smere θ odklonenom od hlavných osí anizotropie. Ak uhol $\theta=45^\circ$, potom $\epsilon_x^{45} \neq 0$, $\epsilon_y^{45} \neq 0$, $\gamma_{xy}^{45} \neq 0$ a podľa rovnice (21) dostaneme:

$$\left(\frac{1}{g_{12}}\right)^2 = \frac{1}{(\epsilon_x^{45} - \epsilon_y^{45})^2} \left(\left(\frac{\Delta^{45}}{h}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g_{11}} - \frac{1}{g_{22}}\right) (\epsilon_x^{45} - \epsilon_y^{45}) + \left(\frac{1}{g_{11}} + \frac{1}{g_{22}}\right) \gamma_{xy}^{45}\right)^2 \right) \quad (25)$$

5 Spôsobu určenia zložiek napätí a deformácií v modeloch z kompozitných materiálov podľa nameraných údajov

Základnými údajmi, ktoré získame pri polarizačných meraniach vzoriek vyrobených z kompozitných materiálov – dielektrík, je rozdiel priebehov elektrických vlnení (parametrov izochróm) a hlavných smerov elektrického vektora (parametre izoklín). Objem informácií o napäťovodeformačnom stave vzorky z kompozitného materiálu, ktoré možno získať na základe týchto hodnôt, závisí od fyzikálnomechanických vlastností materiálov a od druhu závislosti medzi elektromagnetickými a mechanickými veličinami. Spravidla jedna závislosť medzi elektromagnetickými a mechanickými veličinami nepostačuje pre určenie zložiek napätí alebo deformácií v ľubovoľných bodoch vzorky. Vo vzorkách vyrobených z pružných ortotropných materiálov, vzťahovaných k hlavným osiam anizotropie, možno určiť lineárnu kombináciu normálových deformácií (závislosť (17)) alebo napätí (závislosť (19)) v ľubovoľných osiach (závislosti (20), (21)) – len lineárnu

Obr. 1: Zaťažovanie vzoriek k určení optických konštánt C_L , C_T , C_{LT}

funkciu zložiek deformácií alebo napätosti.

Preto v polarizačných metódach je vždy treba riešiť úlohu o separácii napätí, t. j. úlohu o určení zložiek tenzora napätí vo vzorke na základe nameraných polarizačných hodnôt [11], [19]. Na riešenie tejto úlohy sa používajú numerické metódy (numerické integrovanie rovníc rovnováhy a rovníc kompatibility deformácií so zohľadnením závislostí medzi elektromagnetickými a mechanickými veličinami) alebo doplnujúca, experimentálne určená informácia, získaná inými metódami. Rôzne spôsoby separácie napätí vo fotoelasticimetrii ortotropných látok sú uvedené v [12]. Tieto spôsoby sú použiteľné v polarizačných metódach pri rôznych dĺžkach elektromagnetických vln. Najefektívnejšie metódy separácie napätí a deformácií v konštrukčno-ortotropných telesách uvádzame ďalej.

6 Separácia napätí na nezaťažovaných obrysoch povrchu súčastky

V tomto prípade napätia v ľubovoľnom bode obrysu môžu byť určené z nameraných rozdielov priebehov elektromagnetických vln [16]. Uvažujeme bod $M(x', y')$ na nezaťaženom obryse súčastky. Na plôškach, kolmých k osiam súradníc, prechádzajúcich cez tento bod (os x' je kolmá k obrysu) nech je $\sigma_{x'}=0$, $\sigma_{x'y'}=0$, $\sigma_{y'}\neq 0$. Potom pre tento prípad podľa rovnice (20) dostaneme:

$$\sigma_y = \frac{\Delta}{h} \frac{C_{11}C_{22}C_{12}}{\left((C_{11}C_{22})^2 \sin^2 2\alpha + C_{12}^2 (C_{22} \cos^2 \alpha - C_{11} \sin^2 \alpha)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (26)$$

kde α je uhol medzi smerom napätia na obryse v skúmanom bode a hlavným smerom ortotropie.

7 Určenie optických konštánt

Analýza niektorých prác poukázala na to, že nezávisle od postupov, používaných k stanoveniu súvislostí medzi optickými veličinami a napätiami konštrukčnoortotropných, opticky citlivých materiálov, sa v riešeníach objavujú tri základné optické konštanty C_L , C_T , C_{LT} . Konštanty C_L , C_T , C_{LT} je možné určiť zo špeciálne zostavených predpisov experimentu vykonávaného na vzorkách, vyrezaných z rovinného modelu. Teda po vykonaní troch meraní podľa vzorov k príslušným modelom z obr. č. 1 určíme:

$$\begin{aligned} C_L &= \sigma_L h / m \\ C_T &= \sigma_T h / m \\ C_{LT} &= 2\sigma_{LT} h / m \end{aligned} \quad (27)$$

kde m je poradie izolínií, stanovené z optických obrazcov a h je hrúbka vzorky.

Obyčajne namiesto experimentov na šmyk sa vykonáva skúška na jednoosový ťah vzorky vyrezanej pod uhlom 45° k smeru vlákien, pomocou ktorej určíme veľkosť C_{LT} . Vychádzajúc z vlastností stavebných zložiek a vlastností redistribúcie napätí medzi vláknom a maticou jednosmerového kompozitného materiálu je možné určiť konštanty C_L , C_T , C_{LT} . Postup vykonania experimentu jednosmerových kompozitných materiálov je uvedený v práci [3].

Uvažujeme jednosmerovú kompozitnú dosku, ktorej maticu tvorí opticky citlivý polymér s armujúcimi elementami, ktoré sú tiež opticky citlivé. Budeme sledovať len elastické deformácie. V tomto prípade závislosť medzi optickými veličinami (radmi izochromát m) a napätiami v matici aj vláknach sa určuje klasickým spôsobom podľa zákona fotoelasticity:

$$\begin{aligned} S_M &= (\sigma_p - \sigma_q)_M = \frac{m_M C_M}{h_M} \\ S_S &= (\sigma_p - \sigma_q)_S = \frac{m_S C_S}{h_S} \end{aligned} \quad (28)$$

kde $\sigma_{p,q}$ sú hlavné napätia, index M sa vzťahuje k matici a index S k vláknu.

V rámci makromechanického postupu budeme kompozitný materiál považovať za jednorodé ortotropné, opticky citlivé teleso. Pri homogénnom deformovaní vzorky tohto materiálu sú vznikajúce optické efekty (izochromatické pruhy m) späté s napätiami závislosťou, ktorá sa riadi zákonom fotoelasticimetrickej:

$$S = (\sigma_p - \sigma_q) = mC/h. \quad (29)$$

Vo veličine optického rozdielu priebehu, vznikajúcej v kompozitnom materiáli pri prechode polarizovaného svetla, sa prejavujú každá zo zložiek – matica aj vlákna. Ak zanedbáme rotáciu kvázihlavných smerov v kompozitnom materiáli na dráhe lúča svetla, vtedy veličinu optického rozdielu priebehu (hodnota poradia izochromatického pruhu m) v kompozitnom materiáli je možné uvažovať ako algebraický súčet poradia izochromatického pruhu v matici m_M a vlákne m_S :

$$m = m_M + m_S \quad (30)$$

Použitím rovníc (28) až (30) určíme optickú konštantu kompozitného materiálu C pomocou C_M a C_S :

$$C = \frac{S}{m/h} = \frac{S}{(m_M + m_S)/h} = \frac{SC_M C_S}{C_S(S_M H_M) + C_M(S_S H_S)} \quad (31)$$

kde $H_M = h_M/h$, $H_S = h_S/h$, $H_M + H_S = 1$.

Ak od hrúbky zložiek kompozitu H_M , H_S prejdeme k ich objemovým podielom V_S , V_M , vzorec pre C nadobudne tvar

$$C = \frac{SC_M C_S}{C_S(S_M V_M) + C_M(S_S V_S)} \quad (32)$$

V nasledujúcej kapitole prejdeme k stanoveniu spôsobov teoretického i experimentálneho určenia fotoelastických konštant C_L , C_T , C_{LT} .

8 Určenie optickej konštanty C_L

Pre určenie konštanty C_L budeme spočiatku uvažovať jednoduchší model jednoosového napätovo-deformačného stavu kompozitného materiálu. Predpokladáme, že pozdĺžne deformácie v matici aj vláknach sú rovnaké:

$$\epsilon_{LM} = \epsilon_{LS} = \epsilon_L \quad (33)$$

Napätia spĺňajú podmienku rovnováhy:

$$\sigma_L = \sigma_{LM} V_M + \sigma_{LS} V_S \quad (34)$$

Závislosti medzi napätiami a deformáciami majú tvar:

$$\begin{aligned}\epsilon_{LM} &= \sigma_{LM}/E_M \\ \epsilon_{LS} &= \sigma_{LS}/E_S\end{aligned}\quad (35)$$

Súčasným riešením rovníc (32) až (35) dostaneme rovnicu pre fotoelastickú konštantu:

$$C_L = \frac{C_S C_M (E_M V_M + E_S V_S)}{E_M V_M + C_M E_S V_S}\quad (36)$$

Pre určenie C_L zo vzorca (36) je nutné poznať elasticke aj fotoelastické konštanty a objemový obsah zložiek kompozitného materiálu. Príbuznosť výpočtových a experimentálnych hodnôt C_L môžeme zjednodušiť, ak pre určenie C_L použijeme všeobecnejší model napätovodeformačného stavu kompozitného materiálu, a to model napätovodeformačného stavu vo vlákne aj matici.

Uvažujeme, že pozdĺžne a priečne deformácie matrice a vlákien sú rovnaké:

$$\begin{aligned}\epsilon_{LS} &= \epsilon_{LM} = \epsilon_L \\ \epsilon_{TS} &= \epsilon_{TM} = \epsilon_T\end{aligned}\quad (37)$$

a pre napätosť sú podľa [1] splnené podmienky:

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_{LM} V_M + \sigma_{LS} V_S \\ \sigma_T &= \sigma_{TM} V_M + \sigma_{TS} V_S = 0\end{aligned}\quad (38)$$

Riešiac rovnice (32), (37) a (38), pri súčasnom uvažovaní dvojsovej formy závislosti napätí (deformácií) vo vláknach a matici, dostaneme:

$$C_L = \frac{\left(V_S + V_M \frac{E_M(1+\mu_S)}{E_S(1+\mu_M)} \right) C_S C_M}{V_S C_M + V_M C_S \frac{E_M(1+\mu_S)}{E_S(1+\mu_M)}}$$

9 Určenie optickej konštanty C_T

Experimentálne hodnoty C_T sa určujú z meraní pri jednoosovom tlaku vzoriek.

Teoreticky stanovené hodnoty veličiny C_T , ako aj v predchádzajúcom odstavci uvedené hodnoty veličiny C_L , závisia od napätovodeformačného stavu modelu vyrobeného z kompozitného materiálu.

Uvažujme najprv zjednodušený model, používaný k stanoveniu priečného modulu E_T , kde predpokladáme rovnosť napätí len v priečnom smere:

$$\sigma_T = \sigma_{TS} = \sigma_{TM}\quad (39)$$

Dosadením (39) do (32) dostaneme nasledovný výraz pre optickú konštantu v priečnom smere:

$$C_T = \frac{C_S C_M}{V_S C_M + V_M C_S}\quad (40)$$

Porovnanie výsledkov dosiahnutých pri určovaní C_T podľa vzorca (40) s experimentálnymi hodnotami ukazuje, že vypočítané hodnoty sú značne menšie, ako namerané hodnoty. Toto sa často vysvetľuje tým, že vo vybranom modeli neuvažujeme spevňujúci efekt vlákien a to v prípade, keď sú tieto orientované v priečnom smere.

Zdokonalenie uvedeného modelu si vyžaduje zaviesť požiadavku rovnosti deformácií v pozdĺžnom smere:

$$\epsilon_L = \epsilon_{LS} = \epsilon_{LM}\quad (41)$$

Kombinovanie rovníc (39) a (41) s dvojsovou formou závislosti napätí (deformácií) matrice a vlákien a použitím rovnice (32) nás privedie k vzťahu:

$$C_T = \frac{\left(1 + \frac{E_M V_M}{E_S V_S}\right) C_M C_S}{C_M \left(V_S + \mu_M V_M + \frac{E_M}{E_S} V_M (1 - \mu_S)\right) + C_S \left(V_M (1 - \mu_M) + \frac{E_M V_M}{E_S V_S} (V_M + \mu_S V_S)\right)} \quad (42)$$

Hodnoty C_T , určované z rovnice (42), sa viac približujú hodnotám experimentálnym ako hodnoty, určované z rovnice (40). Ale jednako sú tieto hodnoty ešte značne rozdielne oproti hodnotám experimentálnym.

Rozdiely medzi teoretickými a experimentálnymi hodnotami C_T môžu byť zmenšené, ak pri teoretickom určení C_T použijeme výrazy pre elastické konštanty jednosmerového kompozitného materiálu, uvedené v [20]:

$$\begin{aligned} E_L &= E_S V_S + E_M V_M \\ E_T &= E_S^* V_S^* + E_M^* V_M^* \\ G_{LT} &= G_{LTM}^* V_M^* + G_{LTS}^* V_S^* \end{aligned} \quad (43)$$

Aby bolo možné určiť elastické konštanty ortotropnej dosky, bola doska rozdelená na elementy s hrúbkami malými v porovnaní s priemerom vlákien obsiahnutých v tejto doske. Metóda získania uvedených výrazov elastických konštánt každého elementu je založená na použití rovníc rovnováhy a rovníc kompatibility deformácií. Podľa známych vlastností elementov a s použitím štandardných metód priemerovania sa získajú približné výrazy pre elastické konštanty dosky z elementárnych vlákien.

Výraz pre E_T vo vzorci (43) je podľa zmiešavacieho pravidla podobný vzorcu pre pozdĺžny modul E_L . V skutočnosti sa predpokladá, že kompozitný materiál s vláknami v smere L (longitudinálny) má fiktívny rád vlákien v smere T (transverzálny) s modulom E_S^* a objemovým obsahom V_S^* , ktorý závisí od činného objemu vlákien V_S .

Ak uvažujeme, že deformácie v smere T matrice aj fiktívnych vlákien sú rovnaké a napätia matrice a fiktívnych vlákien kompozitu jednoosové, potom závislosti medzi deformáciami a rovnice rovnováhy sú nasledovné:

$$\begin{aligned} \epsilon_T &= \epsilon_{TS} = \epsilon_{TM} \\ \sigma_T &= \sigma_{TS} V_S^* + \sigma_{TM} V_M^* \end{aligned} \quad (44)$$

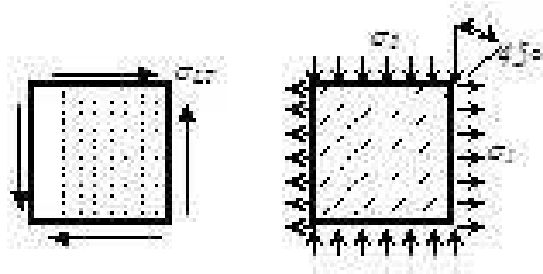
Riešenie týchto rovníc, v súlade s jednoosovou formou závislosti napätia – deformácie, dovoľuje stanoviť závislosť medzi napätiami vo vláknach a matrici:

$$\sigma_{TM} = \frac{E_M^*}{E_S^*} \sigma_{TS}$$

Dosadením rozdielu hlavných napätí do (32) a s uvážením (44) dostaneme výraz pre hodnotu konštanty materiálu v priečnom smere

$$C_T = \frac{\left(V_S^* + \frac{E_M^*}{E_S^*} V_M^*\right) C_M C_S}{V_S C_M + V_M C_S \frac{E_M^*}{E_S^*}} \quad (45)$$

kde fiktívny objem vlákien V_S^* je použitý na prerozdelenie napätí, no činný objem vlákien V_S sa použije pri určení hodnoty poradia izochromatického pruhu. C_T , určené podľa vzorca (45), je dostatočne presné pri porovnaní s výsledkami získanými experimentom. Je možné dosiahnuť presnejší súlad pomocou požiadavky rovnosti deformácií v pozdĺžnom a priečnom smere. Použitím fiktívnych vlákien v priečnom smere vykonáme výpočet C_T spôsobom analogickým tomu, ktorý sa použil pri odvodení rovnice (38) pre C_L .



Obr. 2: Orientácia vlákien kompozitu namáhaného čistým šmykom

Potom výraz pre hodnotu C_T nadobudne tvar:

$$C_T = \frac{\left(V_S^* + V_M^* \frac{E_M^*(1+\mu_S)}{E_S^*(1+\mu_M)} \right) C_M C_S}{V_S C_M + V_M C_S \frac{E_M^*(1+\mu_S)}{E_S^*(1+\mu_M)}} \quad (46)$$

Výsledky C_T , určené z rovnice (46), prakticky súhlasia s experimentálnymi hodnotami. Hodnoty optickej konštanty C_T jednosmerového kompozitného materiálu je možné určiť, ak uvažujeme modifikované vlastnosti zložiek E_M^* , E_S^* , V_M^* , V_S^* a kompozitného materiálu.

10 Určenie optickej konštanty C_{LT}

Experimentálne určenie hodnoty C_{LT} použitého materiálu zaťaženého tlakom je realizované pomocou špeciálne konštruovaného adaptéra, ktorý je uvedený v práci [3]. Čistý šmyk sa dosiahol orientáciou vlákien pod uhlom 45° k osi zaťaženia, kde $\sigma_1 = -\sigma_2$ (obr. č. 2).

K teoretickému odhadu hodnoty C_{LT} jednosmerového kompozitného materiálu sa používali rôzne modely napätovodeformačného stavu [14].

Spočiatku sa používal jednoduchší model, v ktorom sa predpokladala rovnosť šmykových napätí vo vláknach aj matrici:

$$\sigma_{LT} = \sigma_{LTS} = \sigma_{LTM} \quad (47)$$

Dosadením (47) do (32) dostaneme nasledujúci výraz pre C_{LT} :

$$C_{LT} = \frac{C_M C_S}{V_S C_M + V_M C_S} \quad (48)$$

V ďalšom modeli napätovodeformačného stavu sa predpokladala rovnosť šmykových deformácií vo vláknach aj matrici a tiež sa uvažovali podmienky rovnováhy:

$$\begin{aligned} \gamma_{LT} &= \gamma_{LTS} = \gamma_{LTM} \\ \sigma_{LT} &= \sigma_{LTS} V_S + \sigma_{LTM} V_M \end{aligned} \quad (49)$$

Z rovníc (49) spolu s Hookeovým zákonom $\sigma_{LT} = G_{LT} \gamma_{LT}$ a rovnicou (32) po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$C_{LT} = \frac{(V_S + (G_{LTM}/G_{LTS}) V_M) C_M C_S}{V_S C_M + V_M C_S (G_{LTM}/G_{LTS})} \quad (50)$$

Zhodu predbežne vypočítaných a experimentálnych hodnôt je možné upresniť, ak pri výpočte C_{LT} použijeme modifikované moduly šmyku G_{LTM}^* , G_{LTS}^* (43). V tomto prípade Hookeov zákon

pre vlákna aj maticu v podmienkach rovnováhy nadobudne tvar:

$$\sigma_{LTS} = G_{LTS}^* \gamma_{LTS}$$

$$\sigma_{LTM} = G_{LTM}^* \gamma_{LTM} \quad (51)$$

$$\sigma_{LT} = \sigma_{LTS} V_S^* + \sigma_{LTM} V_M^* \quad (52)$$

$$(53)$$

Z rovníc (51) dostaneme závislosť medzi šmykovými napätiami v matici i vláknach:

$$\sigma_{LTM} = \frac{G_{LTM}^*}{G_{LTS}^*} \sigma_{LTS} \quad (54)$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme:

$$C_{LT} = \frac{(V_S^* + (G_{LTM}^*/G_{LTS}^*) V_M) C_S C_M}{V_S C_M + V_M C_S (G_{LTM}^*/G_{LTS}^*)} \quad (55)$$

Zmenený objem frakcií V_M^* , V_S^* sa používa pre určenie prerozdelenia napätí medzi vláknami a maticou, no pri určovaní optickej konštanty C_{LT} sa používajú skutočné objemy frakcií V_M , V_S .

Výsledky pre C_{LT} z rovnice (54) dostatočne súhlasia s experimentálnymi hodnotami. Teda veličina šmykovej hodnoty konštanty C_{LT} jednosmerového kompozitného materiálu môže byť predurčená z vlastností zložiek, ak napätia sú pravidelne prerozdelené medzi vláknami a maticou.

11 Automatizácia procesu experimentu

Pre praktickú realizáciu vyvinutých a modifikovaných metód sme zvolili program *ImageTool*. *UTHSCSA ImageTool* je voľne dostupný program pre spracovanie a analýzu obrazov, ktorý pracuje pod operačným systémom *Microsoft Windows 95/98* alebo *Windows NT/2000*. Program *ImageTool* môže snímať obrazy pomocou ľubovoľnej kamery a frame grabbra, napr. *DT 3155* od firmy *Data Translation* alebo ľubovoľného iného frame grabbra vybaveného *TWAIN* rozhraním. Obrazy môže načítať tiež zo súborov. *ImageTool* podporuje 22 typov formátov súborov.

ImageTool má výkonný script jazyk, ktorý umožňuje vývoj ďalších nástrojov pre analýzu a spracovanie obrazu. Program *ImageTool* bol navrhnutý s otvorenou architektúrou, ktorá poskytuje rozšírenie programu pomocou spomínaných *plug-in* modulov. *Plug-in* moduly sú *DLL* súbory, ktoré môžeme naprogramovať pre program *ImageTool* v programovacom jazyku *Borland C++ 5.02*. *ImageTool* teda môžeme ľahko rozšíriť o vlastné metódy spracovania obrazu.

V rámci programu *ImageTool* sme vytvorili *plug-in* modul *Photoelast* [12], ktorý slúži na účely stanovenia veľkosti optickej konštanty s následnou analýzou napätí ortotropného modelu [21].

12 Záver

Je nutné zdôrazniť, že týmto riešením boli odstránené subjektívne omyly, ktorých sa dopúšťal experimentátor pri stanovení optickej konštanty a následnej separácii napätí. V neposlednom rade je treba zdôrazniť vyššiu efektivitu skrátením času potrebného na celý experiment.

Literatúra

- [1] Aben, Ch., K.: *Integral Photoelasticity*. Valgus. Tallin, 1975.
- [2] Agarwal, B., D. – Broutman, L., J.: *Vláknové kompozity*. SNTL. Praha, 1987.

- [3] Asundi, A., K. – Sajan, M., R.: *Low-cost Digital Polariscopes Dynamic Photoelasticity*. No. 9, PP. 3001–3055. Optical Engineering, 1994.
- [4] Bron, M. – Wolf, E.: *Osnovy optiky*. Nauka. Moskva, 1970.
- [5] Dally, J., W. – Prabhakaran, R.: *Photo-Orthotropic-Elasticity*. V. 11, PP. 346356. Experimental Mechanics, 1971.
- [6] Fandáková, M. – Vavro, J. – Kopecký, M.: *Static analyse of the manipulator arm loading*. 5th Youth Symposium on Experimental Solid Mechanics, Púchov 2006, Slovakia, Book of abstracts, p. 23, ISBN 80-969228-0-7.
- [7] Guzja, A., N.: *Mechanika kompozitnych materialov i elementov konstrukcij*. Naukova dumka. Kiev, 1983.
- [8] Haake, S., J. – Patterson, E., A. – Wang, Z., F.: *2D and 3D Separation of Stresses Using Automated Photoelasticity*. No. 3, PP. 269–276. Experimental Mechanics, 1996.
- [9] Hayashi, T. – Morimoto, Y.: *Photoelastic Stress Analysis of Orthotropic Materials by Using an Isotropic Plate*. No 3, PP. 245–250. Experimental Mechanics, 1995.
- [10] Chaturvedi, S., K.: *A Rational Theory of Oblique Incidence and its Extension to Stress-separation in Birefringent Composites*. V.23, No. 1, PP. 36–41. Experimental Mechanics, 1983.
- [11] Kočan, J. – Ostertag, O. – Sivák, P.: *Problems of Study a Little Details in Photoelasticity*. 39th International Conference Experimental Stress Analysis EAN. PP. 249-254. Tábor, 2001.
- [12] Netrebko, V., P.: *Fotouprugosť anizotropnych tel*. MGU. Moskva, 1988.
- [13] Novotný, L.: *Využitie MKP pri simulácii rastu mikrodutín v skúšobných vzorkách*. Zborník prednášok zo seminára Výpočty konstrukcí metódou konečných prvků, str. 93-100, Ústav termomechaniky AV ČR, Praha, 2002.
- [14] Ostertag, O.: *Automatizácia investigácie izotropných a ortotropných materiálov prostredníctvom fotoelasticimetrie*. Doktorandská dizertačná práca. Košice, 2002.
- [15] Ostertag, O. – Kočan, J. – Marcin, J. – Buša, J.: *Využitie automatizácie a metódy charakteristik v separácii zložiek napätí*. Zborník z 38. medzinárodnej konferencie EAN. PP. 215–221. Třešť, 2000.
- [16] Ostertag, O. – Kočan, J. – Ostertagová, E.: *Možnosti využitia metódy PHOTOSTRESS v priemysle*. Strojárstvo č.3. MEDIA Žilina. Žilina, marec 2000. Str. 48 – 50. ISSN 1335-2938.
- [17] Ostertag, O.: *Laplaceova a Poissonova rovnica pri separácii napätí zaťaženej dvojdimenzionálnej oblasti schopnej dočasného dvojlomu*. Acta Mechanica Slovaca 9/2005. Košice, 2005. Pp.119 – 124. ISSN 1335 2393.
- [18] Sampson, R., C.: *A Stres-Optic Law for Photoelastic Analysis of Orthotropic Composites*. V. 10 (5), PP. 210–215. Experimental Mechanics, 1970.
- [19] Trebuňa, F.: *Určovanie zložiek napätosti metódou reflexnej fotoelasticimetrie s priamym prepojením polariskopu s minipočítačom*. No. 1, PP. 54–60. Strojárstvo, 1989.
- [20] Trebuňa, F. – Šimčák, F.: *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. EMILENA Košice. Košice, 2004. ISBN 80-8073-148-9.

- [21] Trebuňa, F.: *Princípy, postupy, prístroje v metóde photostress*. EMILENA. Košice, 2006.
- [22] Vavro, J. – Kopecký, M. – Sága, M. – Fandáková, M.: *Nové prostriedky a metódy riešenia sústav telies II*, ISBN 80-968337-9-0, EAN 9788096833795, rok vydania 2004, počet strán 200.
- [23] Vavro, J. – Kopecký, M. – Fandáková, M.: *Design optimization of the thin shell mechanical structures*. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brazil 2005, str. 121-126.
- [24] Vavro, J. – Kopecký, M. – Fandáková, M.: *Analysis and experimental measurement of the manipulator K1-K5 arm loading*. EAN, Červený Kláštor, Slovakia, Acta Mechanica Slovaca 1/2006, p. 631-634, ISSN 1335-2396.